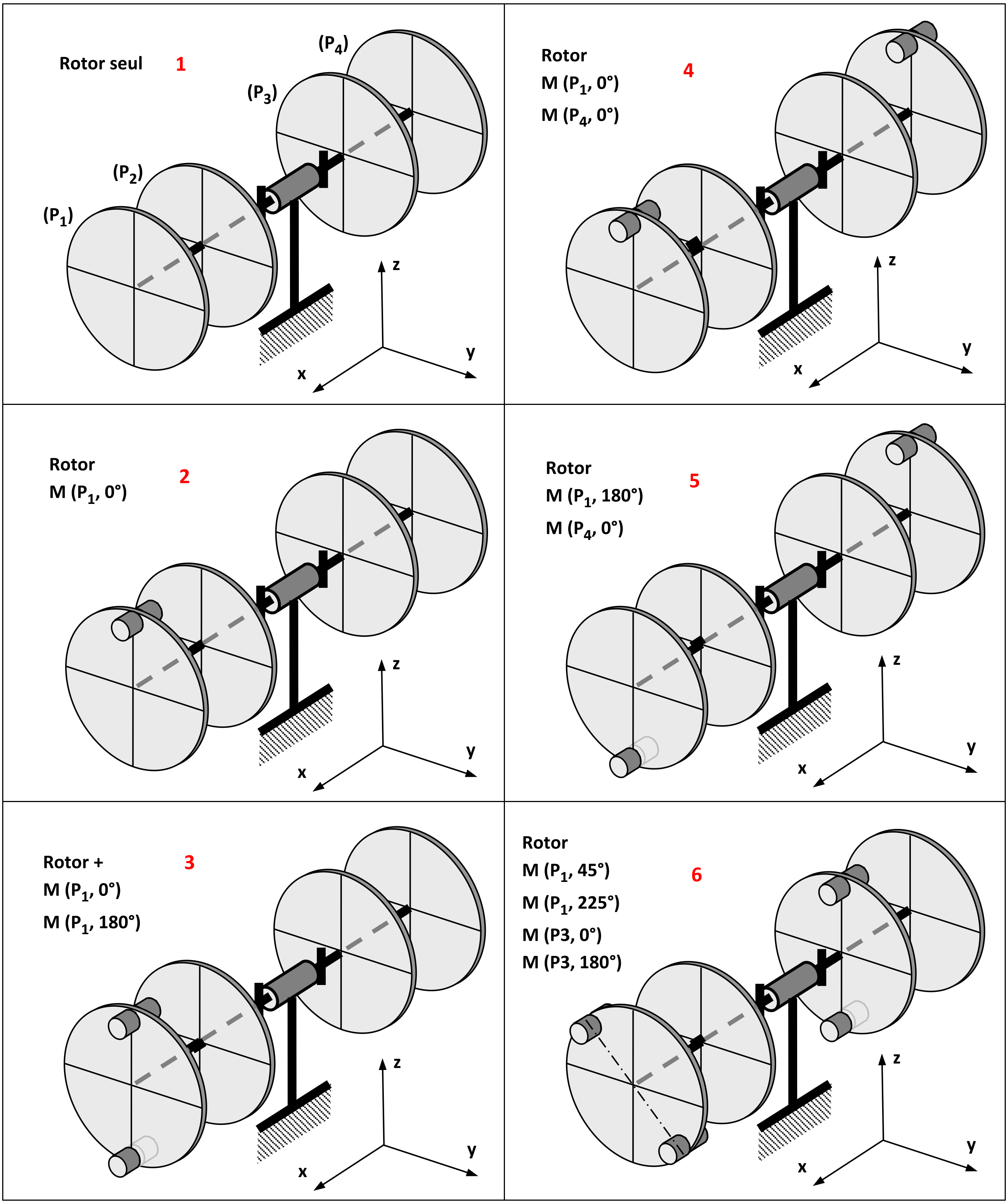
Exercice 1: Matrice d'inertie – Equilibreuse Deltalab

Dans chacune des situations suivantes, sauf la première, une ou plusieurs masses identiques sont ajoutée à un rayon R.



Question 1: Déterminer la matrice d'inertie $I(G_i, P_i)$ d'un plateau P_i sans masselotte en son centre de gravité G_i.

On connaît le résultat :

$$I(G_i, P_i) = \begin{bmatrix} M\dfrac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_i}$$

Question 2: En déduire cette matrice en O, $I(O, P_i)$, pour chacun des plateaux, dans la base du solide $\mathfrak{B}$.

Rappel :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^B$$

$$I(O,S) = I(G,S) + M \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_B$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^B$$

$$I(O, P_1) = I(G_1, P_1) + M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {d_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} M\dfrac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12} + {d_2}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12} + {d_2}^2\right) \end{bmatrix}_B$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^B$$

$$I(O, P_2) = I(G_2, P_2) + M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {d_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {d_1}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} M\dfrac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12} + {d_1}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{e^2}{12} + {d_1}^2\right) \end{bmatrix}_B$$

De plus :

$$I(O, P_1) = I(O, P_4)$$
$$I(O, P_2) = I(O, P_3)$$

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie de la partie mobile $I(O,S)$ sans masselottes dans la base du solide $\mathfrak{B}$ et la mettre sous forme simplifié en ne faisant apparaître que des lettres de A à F non nuls

$$I(O,S)=\sum_{i=1}^{4} I(O,P_i)=2I(O,P_1)+2I(O,P_2)$$

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{e^2}{6}+2{d_2}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{e^2}{6}+2{d_2}^2\right) \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{e^2}{6}+2{d_1}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{e^2}{6}+2{d_1}^2\right) \end{bmatrix}_B$$

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} 2MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & M\left(R^2+\frac{e^2}{3}+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\left(R^2+\frac{e^2}{3}+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right)\right) \end{bmatrix}_B$$

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

Pour chaque cas proposé plus haut :

Question 4: Le centre de gravité G de l'ensemble mobile est-il sur l'axe de rotation $(O,\vec{x})$?

	$CDG \in (0,\vec{x})$?
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	1

Question 5: Déterminer la matrice d'inertie en O de la partie mobile équipée des masselottes proposées dans la base du solide $\mathfrak{B}$ et la mettre sous forme simplifié en ne faisant apparaître que des lettres de A à F non nuls indicés du numéro de chaque cas

Soit la masselotte S_i de masse m_i placée en M_i telle que $\overrightarrow{OM_i} = x_i\vec{x} + y_i\vec{y} + z_i\vec{z}$

$$I(M_i,S_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$$

$$I(O,S_i) = I(M_i,S_i) + m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2 + {z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2 + {z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2 + {y_i}^2 \end{bmatrix}_B$$

$$I(O,S_i) = m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2 + {z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2 + {z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2 + {y_i}^2 \end{bmatrix}_B$$

Dans chaque cas, on a :

$$I\left(O,S + \sum S_i\right) = I(O,S) + I$$

$$I\left(O,S + \sum S_i\right) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + I$$

I étant la matrice d'inertie de l'ensemble des masselottes ajoutées.

1	RAS	$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_B$
2	$\overrightarrow{OM_1} = d_2\vec{x} + r\vec{z}$ $I(O,S_1) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & -d_2r \\ 0 & {d_2}^2 + r^2 & 0 \\ -d_2r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$	$I = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & -d_2r \\ 0 & {d_2}^2 + r^2 & 0 \\ -d_2r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$
3	$\overrightarrow{OM_1} = d_2\vec{x} + r\vec{z}$ $I(O,S_1) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & -d_2r \\ 0 & {d_2}^2 + r^2 & 0 \\ -d_2r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_2} = d_2\vec{x} - r\vec{z}$ $I(O,S_2) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & d_2r \\ 0 & {d_2}^2 + r^2 & 0 \\ d_2r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$	$I = m\begin{bmatrix} 2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left({d_2}^2 + r^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$
4	$\overrightarrow{OM_1} = d_2\vec{x} + r\vec{z}$ $I(O,S_1) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & -d_2r \\ 0 & {d_2}^2 + r^2 & 0 \\ -d_2r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_2} = -d_2\vec{x} + r\vec{z}$	$I = m\begin{bmatrix} 2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left({d_2}^2 + r^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$

	$I(O,S_2) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & d_2 r \\ 0 & {d_2}^2+r^2 & 0 \\ d_2 r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$	
5	$\overrightarrow{OM_1} = d_2\vec{x} - r\vec{z}$ $I(O,S_1) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & d_2 r \\ 0 & {d_2}^2+r^2 & 0 \\ d_2 r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_2} = -d_2\vec{x} + r\vec{z}$ $I(O,S_2) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & d_2 r \\ 0 & {d_2}^2+r^2 & 0 \\ d_2 r & 0 & {d_2}^2 \end{bmatrix}_B$	$I = m\begin{bmatrix} 2r^2 & 0 & 2d_2 r \\ 0 & 2\left({d_2}^2+r^2\right) & 0 \\ 2d_2 r & 0 & 2{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$
6	$\overrightarrow{OM_1} = d_2\vec{x} - r\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} + r\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}$ $I(O,S_1)$ $= m\begin{bmatrix} r^2 & d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} & -d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} \\ r\frac{\sqrt{2}}{2}d_2 & {d_2}^2+\frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} \\ -d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{r^2}{2} & {d_2}^2+\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_2} = d_2\vec{x} + r\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} - r\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{z}$ $I(O,S_2)$ $= m\begin{bmatrix} r^2 & -d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} & d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -r\frac{\sqrt{2}}{2}d_2 & {d_2}^2+\frac{r^2}{2} & \frac{r^2}{2} \\ d_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{r^2}{2} & {d_2}^2+\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_3} = -d_1\vec{x} + r\vec{z}$ $I(O,S_3) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & d_1 r \\ 0 & {d_1}^2+r^2 & 0 \\ d_1 r & 0 & {d_1}^2 \end{bmatrix}_B$ $\overrightarrow{OM_4} = -d_1\vec{x} - r\vec{z}$ $I(O,S_4) = m\begin{bmatrix} r^2 & 0 & -d_1 r \\ 0 & {d_1}^2+r^2 & 0 \\ -d_1 r & 0 & {d_1}^2 \end{bmatrix}_B$	$I =$ $m\begin{bmatrix} 2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left({d_1}^2+r^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2{d_1}^2 \end{bmatrix}_B$ $+ m\begin{bmatrix} 2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2{d_2}^2+r^2 & r^2 \\ 0 & r^2 & 2{d_2}^2+r^2 \end{bmatrix}_B$ $I =$ $m\begin{bmatrix} 4r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right) & r^2 \\ 0 & r^2 & r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right) \end{bmatrix}_B$

1	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_B$
2	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} mr^2 & 0 & -md_2r \\ 0 & m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ -md_2r & 0 & m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $= \begin{bmatrix} A+mr^2 & 0 & -md_2r \\ 0 & B+m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ -md_2r & 0 & C+m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_B$
3	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $= \begin{bmatrix} A+2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & B+2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 0 & 0 & C+2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_B$
4	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $= \begin{bmatrix} A+2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & B+2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 0 & 0 & C+2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_B$
5	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 2mr^2 & 0 & 2md_2r \\ 0 & 2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 2md_2r & 0 & 2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B$ $= \begin{bmatrix} A+2mr^2 & 0 & 2md_2r \\ 0 & B+2m({d_2}^2+r^2) & 0 \\ 2md_2r & 0 & C+2m{d_2}^2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & -E_5 \\ 0 & B_5 & 0 \\ -E_5 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_B$
6	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B + m\begin{bmatrix} 4r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right) & r^2 \\ 0 & r^2 & r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right) \end{bmatrix}_B$ $= \begin{bmatrix} A+4mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & B+m\left(3r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right)\right) & mr^2 \\ 0 & mr^2 & C+m\left[r^2+2\left({d_1}^2+{d_2}^2\right)\right] \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & -D_6 \\ 0 & -D_6 & C_6 \end{bmatrix}_B$

Question 6: La matrice d'inertie possède-t-elle comme axe principal d'inertie l'axe $(0,\vec{x})$? $(0,\vec{y})$? $(0,\vec{z})$?

	$(0,\vec{x})$ API ?	$(0,\vec{y})$ API ?	$(0,\vec{z})$ API ?
1	1	1	1
2	0	1	0
3	1	1	1
4	1	1	1
5	0	1	0
6	1	0	0

Question 7: Mener une étude expérimentale sur le système et déterminer s'il y a ou non équilibrage

	Equilibré ?
1	1
2	0
3	1
4	0
5	0
6	1

Question 8: Faire le récapitulatif, pour chaque situation, de la position du centre de gravité (sur l 'axe ?), des axes principaux d'inertie et de l'équilibre réalisé ou non lors de la manipulation et en déduire les conditions nécessaires à l'équilibrage en rotation

	$CDG \in (0,\vec{x})$?	$(0,\vec{x})$ API ?	$(0,\vec{y})$ API ?	$(0,\vec{z})$ API ?	Equilibré ?
1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	1